



Portafolios mexicanos tradicionales y no tradicionales

Héctor Alonso Olivares Aguayo

Facultad de Negocios

Universidad La Salle México

hectoralonso.olivares@lasalle.mx

Recibido 2 de marzo del 2021; Aceptado 12 de mayo del 2021; disponible en línea 12 de julio del 2021

Resumen:

El objetivo de la investigación es observar una subestimación del riesgo en el modelo tradicional de Portafolios de Markowitz respecto a una variación al modelo considerando Cópula-GARCH Elípticas. Con datos semanales se estiman Portafolios de mínima varianza conformados por los Índices Sectoriales Invertibles de la BMV en el periodo 2009-2018. Los resultados de esta investigación, muestran que el modelo tradicional subestima el riesgo, a diferencia de los Portafolios Cópula-GARCH. La principal implicación es que el inversionista opte por Portafolios no tradicionales con Cópula-GARCH puesto que los rendimientos esperados son mayores que los obtenidos por el modelo tradicional. Para futuras investigaciones se puede romper el supuesto de normalidad en ambos modelos e incluir un activo libre de riesgo.

Palabras Claves: Técnicas de Optimización; Índices Sectoriales Invertibles de la BMV; Inversiones de capital.

Códigos JEL: C61; G31.

Traditional and non-traditional Mexican portfolios

Abstract:

The objective of the research is to observe an underestimation of risk in the traditional Markowitz Portfolio model with respect to a variation to the model considering Copula-GARCH Ellipticals. With weekly data, Portfolios of minimum variance are estimated, made up of the Invertible Sectoral Indices of the BMV in the 2009-2018 period. The results of this research show that the traditional model underestimates risk, unlike Copula-GARCH Portfolios. The main implication is that the investor opts for non-traditional Portfolios with Copula-GARCH since the expected returns are higher than those obtained by the traditional model. For future research, the assumption normality can be broken in both models and a risk-free asset can be included.

Keywords: Optimization Techniques; Invertible Sectoral Indices of the BMV; Capital investments.

JEL Codes: C61; G31.



1. Introducción

La BMV cuenta con una clasificación sectorial a partir del año 2009; dicha clasificación se encuentra conformada totalmente por diez sectores (Energía, Materiales, Industrial, Servicios y Bienes de Consumo no Básico, Productos de Consumo Frecuente, Salud, Servicios Financieros, Tecnología de la Información, Servicios de Telecomunicaciones, y por último Servicios Públicos). De estos, se analizan y conformaran el Portafolio de inversión únicamente los cinco que son de Rendimiento Total (RT) los cuales son: Materiales, Industrial, Productos de Consumo Frecuente, Servicios de Telecomunicaciones y Servicios Financieros.

La importancia de esta investigación es el comparativo entre el Portafolio tradicional propuesto por Markowitz (1952) contra los de Cópula-GARCH Elípticos.

Los Portafolios se conforman por los Índices Sectoriales Invertibles RT de la BMV. Asimismo, se realiza un contraste entre los Portafolios estimados versus el índice S&P/BMV IPC. Mediante los Portafolios Cópula-GARCH de los Índices Sectoriales Invertibles RT se tienen mejores resultados, pues la diversificación captura de mejor manera las características no lineales de los Índices Sectoriales Invertibles RT.

Este trabajo se integra de la manera siguiente: en la sección 2 se presenta la revisión de literatura, en la sección 3 los aspectos metodológicos, en la sección 4 se obtienen los resultados, y finalmente en la sección 5 se muestran las conclusiones.

2. Revisión de literatura

2.1 Historia de las Finanzas



Las finanzas surgen como ciencia con Modigliani-Miller y la eficiencia de los mercados, especialmente con respecto al análisis del riesgo-rendimiento de un activo o Portafolio de activos, la estructura de capital de las empresas y uno de los supuestos fundamentales para el desarrollo de modelos económicos, la eficiencia de los mercados.

La Teoría de Eficiencia de los Mercados (EMH), popularizada por Fama (1965), considera un determinado nivel de eficiencia dentro del mercado, si la información con la que se cuenta en el mismo, se absorbe rápidamente y los precios cambian al azar. La EMH es extendida por Eugene Fama profesor de la Universidad de Chicago en 1965, a quien comúnmente se le considera padre de la EMH, a pesar de tener más de medio siglo de haber sido concebida. La versión más antigua de este concepto se encuentra en el libro "The Stock Exchanges of London, Paris, and New York: A Comparison" Gibson (1889), en donde el autor explica que el precio de las acciones de la Bolsa de Valores de Londres, París y New York, adquiere el valor que las personas más brillantes les asignan cuando se cotizan en un mercado abierto. Con esta afirmación Gibson presenta uno de los conceptos fundamentales de la EMH, los inversionistas racionales toman sus decisiones con base a la información disponible en el mercado. Una década después, el primer acercamiento matemático al concepto de EMH, es construido por el matemático Bachelier (1900), quien propone en su tesis Doctoral "Theorie de la spéculation", (Teoría de la especulación), al movimiento browniano como modelo asociado a los precios especulativos. Aunque, un resultado importante que deduce Bachelier fue concluir que la esperanza de ganancia de un especulador financiero es igual a cero, es decir, el mercado se comporta siguiendo el comportamiento de un proceso estocástico conocido como martingala.

El aporte de Fama a esta teoría, es la clasificación de los diferentes tipos de eficiencia dependiendo del grado de información con la cual los inversionistas disponen. Así, la forma débil toma el valor de los activos a partir de los precios históricos de las acciones. La forma semi-fuerte amplía ésta a la de



información pública, con la que se cuenta libremente en el mercado, por ejemplo, los anuncios de la división de acciones, informes anuales, nuevos problemas de seguridad, etc. Y por último la forma fuerte, que es cuando además de tener acceso a estas dos fuentes de información los inversionistas tienen acceso monopolístico a información privilegiada para la asignación de los precios. Lo anterior, implica que la información es ampliamente distribuida, lo cual es uno de sus supuestos, y que al mismo tiempo esta comunicación es simétrica. Pero en la realidad esto no es así, debido a que en el mercado financiero y en particular el crediticio no hay competencia perfecta. Lo anterior, genera una mayor incertidumbre e incrementa el riesgo para el inversionista y para las propias empresas, porque la información en realidad es asimétrica y pueda que basado en ello, no tomen las opciones adecuadas para la toma de decisiones, y por esta razón es sumamente importante el análisis de administración de riesgos tanto en el mercado financiero como en el bancario. Estas teorías ayudan a crear técnicas, políticas, y nuevos instrumentos aplicados en mejora del desempeño de los mercados financieros y ayudan a los inversionistas a seleccionar e implementar decisiones óptimas de inversión; buscando siempre en los inversionistas la maximización de los beneficios y la minimización de los riesgos. Es por ello que importantes teorías aplicadas de las finanzas recientes, se encuentran en el área de la Teoría de Portafolios.

La aplicación de modelos con Cópulas ha tenido bastante crecimiento en la actualidad.

Las Cópulas son excelentes modelos de medición, pues al generar una distribución conjunta a la medida del fenómeno a estudiar a través del producto de las distribuciones marginales, se tienen por lo general resultados que se ajustan adecuadamente a dicho fenómeno. Tal es el caso en investigaciones como Badaye y Narsoo (2020), quienes analizan el desempeño de varios modelos VaR y C-VaR para evaluar el riesgo de un Portafolio igualmente ponderado de alta frecuencia (intradía) para cinco monedas extranjeras. Al modelar la estructura de dependencia con Cópulas y simulación Monte Carlo. Los



resultados muestran a través del *Backtesting* que 4 de las 5 monedas no se rechazan al 95% de confianza. Sin embargo, cuando se consideraron mayores restricciones únicamente la Cópula t-Student y Clayton no se rechazó su VaR y C-VaR. Lin, et al. (2019), proponen un modelo Cópula-GARCH que integra los riesgos de liquidez y mercado en los bonos corporativos, particularmente los mejores resultados se muestran con la Cópula t-Student. Los resultados indican que, durante la crisis, los países con valores más altos de coeficiente tienden a tener una pérdida mayor que otras.

En cuanto a cobertura algunas investigaciones recientes son Louhichi y Rais (2019), quienes mejoran la efectividad de las superposiciones de cobertura a través de futuros contra ciertos riesgos de inversión y muestran que la Cópula-GARCH supera el modelo convencional y mejora la efectividad de la relación de cobertura, lo cual es útil para inversionistas y gestores de riesgos quienes desean determinar las mejores estrategias de cobertura. Xu y Lien (2020) aplican modelos generalizados de puntuación autorregresiva (GAS) a la cobertura de futuros de petróleo crudo y gas natural, con MCO y modelos GARCH basados en Cópulas variantes en el tiempo en términos de reducción de volatilidad y de VaR muestran que los modelos GAS tienden a exhibir una mejor efectividad de cobertura que otras estrategias, particularmente para el gas natural.

En cuanto a la medición del riesgo de cola Gong, et al. (2019) proponen una distribución Cópula t-GARCH como modelo para analizar la dependencia de la cola y analizar el riesgo de Portafolios para los mercados de futuros de petróleo crudo. Empíricamente encuentran que los futuros del petróleo crudo Brent y WTI exhiben un pico más alto, colas gruesas y una volatilidad persistente, que son adecuadas para el modelo. Happersberger, et al. (2020) pronostican el riesgo de Portafolios para administrar estrategias dinámicas de protección del riesgo de la cola, se basa en la Teoría del Valor Extremo con Cópula-GARCH utilizando una función de pérdida que supera el VaR, se propone un enfoque de



combinación de promedio simple para modelar la cola de la distribución de los rendimientos del Portafolio.

En torno al riesgo extremo Sun, et al. (2020) emplean un enfoque GARCH-Copula-CoVaR para abordar los efectos de riesgo extremo del mercado de productos básicos al mercado marítimo. Los resultados proporcionan evidencia de la transmisión del riesgo en el sector petrolero y energético a los mercados marítimos.

Finalmente, referente a una adecuada toma de decisiones Liu, et al. (2020) pronostican y miden el riesgo sistémico en los mercados financieros mundiales y construyen un modelo de decisión comercial para inversores e instituciones financieras, basado en Cópula-GARCH.

3. Aspectos metodológicos

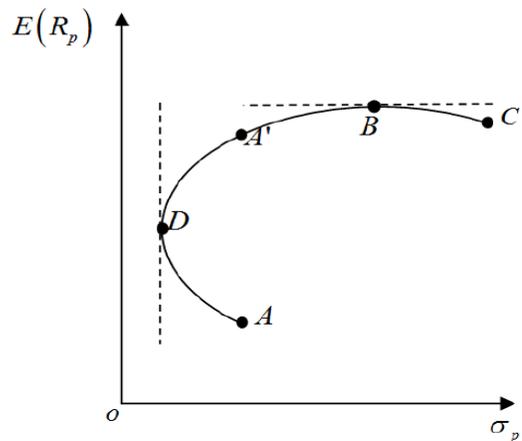
3.1 Planteamiento del modelo de optimización de mínima varianza

El modelo de optimización de mínima varianza supone que los inversionistas toman sus decisiones de inversión únicamente considerando dos variables del Portafolio: rendimiento esperado y varianza.

Si el inversionista es racional presupone que prefiere una mayor cantidad de rendimiento esperado, es decir, que a igual nivel de riesgo prefiere la inversión de mayor rendimiento esperado.

El modelo de mínima varianza permite encontrar combinaciones de activos que tienen riesgo o desviación estándar mínima para diferentes niveles de rendimiento esperado, lo anterior se conoce como curva de mínima varianza; con el modelo se tienen también combinaciones que generan expectativas de rendimiento máximos para diferentes niveles de riesgo dados. El conjunto de canastas de activos que reúnen estas dos propiedades en forma simultánea se conoce como la “frontera eficiente de los Portafolios”. Así que, el enfoque de Markowitz hace posible que el inversionista irracional descarte una cantidad considerable de alternativas de inversión; debido a que éstas se encuentran “dominadas” por las alternativas ubicadas en la frontera eficiente de los Portafolios como se muestra en la Figura 1.

Figura 1: Frontera eficiente de los Portafolios



Fuente: *Elaboración propia.*

El Portafolio expresado con la letra “D” es el llamado de mínima varianza, ya que, como se puede apreciar claramente en el vértice de la parábola su desviación estándar es la más pequeña de todos los Portafolios posibles. Asimismo, se muestra que a partir de dicho Portafolio hasta el Portafolio “C” se construye la parte superior de la parábola, la cual se denomina “frontera eficiente de los Portafolios” justo donde se encuentran los inversionistas racionales, ya que, un inversionista que opte por un portafolio “A” no sería racional pues estaría optando por un rendimiento esperado menor que el portafolio “A’”, los cuales tienen el mismo nivel de riesgo.

La suma ponderada de los rendimientos esperados $E(R_i)$ de cada activo w_i con $i = 1, 2, \dots, n$, representa el rendimiento esperado del Portafolio de inversión $E(R_p)$, la fórmula se expresa de la siguiente manera:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) \quad w_i \geq 0 \quad (1)$$

Se realiza el cálculo de los rendimientos como el logaritmo natural de la razón entre el precio de cierre del día objetivo y el precio de cierre al día anterior como se muestra en (2).

$$\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (2)$$



P_t es el precio del activo en el periodo t y P_{t-1} el precio del activo en el periodo $t-1$.

El riesgo del portafolio de inversión se representa con σ_p que es la desviación estándar de los rendimientos del portafolio Luenberger (1998). La fórmula para la varianza del portafolio es:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= Var(R_p) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j Cov(R_i, R_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}\end{aligned}\quad (3)$$

Donde σ_{ij} es la covarianza entre los rendimientos de los activos i y j , definida como

$\sigma_{ij} = E\{[R_i - E(R_i)][R_j - E(R_j)]\}$, o expresada en términos del coeficiente de correlación lineal de

Pearson, ρ_{ij} , lo anterior equivale a:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (4)$$

El coeficiente de correlación es un indicador que sirve para medir el comportamiento de los rendimientos de los activos en distintas circunstancias.

El coeficiente de correlación que existe entre las dos variables aleatorias o los activos i y j de la ecuación 4 se expresa de la siguiente manera:

$$-1 \leq \rho_{ij} = \frac{Cov(i, j)}{\sigma_i \sigma_j} \leq 1 \quad (5)$$

- Si $\rho_{ij} = 1$, con $i \neq j$, la correlación es directa. Significa que si el precio de una acción incrementa, la otra acción también tendrá un incremento en su precio y viceversa. También se dice que la correlación es lineal perfecta y positiva. Este caso se llega a observar entre acciones que pertenecen al mismo sector, cuyos precios siguen un comportamiento similar en comparación con los precios a otros sectores.



- Si $\rho_{ij} = 0$ con $i \neq j$, no existe correlación lineal entre los rendimientos de los activos por lo que sería incierto el comportamiento de un activo respecto al otro. Significa también que las variables son independientes. Este caso es difícil de encontrar ya que, las acciones se encuentran cotizando dentro de un mismo mercado en el que el intercambio realizado mediante su compra-venta tiene efectos respecto al comportamiento del conjunto de los activos en el mercado accionario.
- Si $\rho_{ij} = -1$, con $i \neq j$, la correlación es inversa, es decir que los rendimientos se mueven en sentidos opuestos, así que cuando el precio de un activo incrementa, se compensa exactamente con el movimiento descendente del otro. Se dice también que la correlación es lineal perfecta y negativa. El valor unitario y negativo del coeficiente de correlación indica que los movimientos del precio entre acciones no se explican mutuamente, esto hace que el coeficiente de correlación sea utilizado como criterio para la diversificación en el portafolio.

3.2 Problema de optimización

Harry Markowitz se planteó resolver el problema de investigación de operaciones siguiente:

$$\min \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \\ \sigma_{n1} & \dots & \dots & & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

sujeto a:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \tag{6}$$

El objetivo de Markowitz es minimizar la varianza del Portafolio y por ende el riesgo de éste, la primera restricción indica la tasa de rendimiento objetivo y la segunda que la suma de las cantidades ponderadas invertidas en el Portafolio es uno.

Cuando el problema se resuelve, se encuentra la proporción de cada activo dentro del Portafolio que satisface también las restricciones planteadas en el modelo.

Otra manera de plantear la solución al problema de optimización anterior es a través de una función lagrangiana de la siguiente forma:

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda_1 \left(1 - \sum_{i=1}^n w_i \right) + \lambda_2 \left(E(R_p)^* - \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) \right) \quad (7)$$

Los puntos críticos son obtenidos derivando parcialmente respecto a los n ponderadores (w_i) y respecto al multiplicador de Lagrange (λ) e igualando a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial w_1} &= w_1 \sigma_{11} + w_2 \sigma_{12} + \dots + w_n \sigma_{1n} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial w_2} &= w_1 \sigma_{21} + w_2 \sigma_{22} + \dots + w_n \sigma_{2n} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial w_n} &= w_1 \sigma_{n1} + w_2 \sigma_{n2} + \dots + w_n \sigma_{nn} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= w_1 + w_2 + \dots + w_n - 1 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se encuentran las cantidades de w_i que maximizan la utilidad del inversionista racional.

Investigaciones posteriores a las de Markowitz que incorporan un activo financiero libre de riesgo; por ejemplo Sharpe (1963) y (1970), Tobin (1958), Lintner (1965), Treynor (1962) y Mossin (1966) dicen que si los inversionistas pueden prestar y pedir prestado a la tasa de interés libre de riesgo se obtiene una región eficiente lineal por encima a la curva de Markowitz.

3.3 Definición de Cópula

Una función $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ es una n -Cópula si cuenta con las siguientes propiedades:

- $\forall u \in [0,1], C(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) = u$.
- $\forall u_i \in [0,1], C(u_1, \dots, u_n) = 0$ si al menos uno de los u_i 's es igual a cero.



- C está definida y es n-creciente, i.e., el C-volumen de cada caja cuyos vértices se encuentran en $[0,1]^n$ es positivo.

Se desprende de esta definición que una Cópula no es más que una distribución multivariada dentro del intervalo $[0,1]^n$ con marginales uniformes. Esta definición es muy natural si se tiene en cuenta cómo es que se deriva una cópula de una función de distribución multivariada continua; de hecho, en este caso la cópula no es más que la función de distribución multivariada original con una transformación hacia una marginal de una variable.

3.4 Teorema de Sklar

Sea una función de distribución n-dimensional F con distribuciones marginales continuas F_1, \dots, F_n , existe una única n-copula $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ tal que:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (9)$$

Por lo tanto, la cópula combina las marginales para formar la distribución multivariada. Este teorema proporciona una parametrización de la distribución multivariada y un esquema de construcción de cópulas. De hecho, dada una distribución F con marginales multivariantes F_1, \dots, F_n , la función:

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \quad (10)$$

Es automáticamente una n-Cópula con distribución multivariada F.

De acuerdo al Teorema de Sklar (1959), la densidad n-dimensional f puede ser representada como

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) * \dots * f(x_n) * c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (11)$$

Donde c es la densidad de la Cópula C. Este resultado permite la elección de marginales diferentes y una estructura de dependencia dada por la Cópula para luego ser usadas en la construcción de una



distribución multivariada. Esto contrasta con la manera usual de construir distribuciones multivariadas, que tiene la restricción de que las marginales son usualmente del mismo tipo.

Mediante el Teorema de Sklar, se sabe que, para cada función de distribución multivariada, se puede fácilmente derivar una Cópula. A pesar de existir un número considerable, solo unas cuantas familias de Cópulas juegan un papel importante. Entre las familias de Cópulas que tienen este papel están las Elípticas.

3.5 Cópulas Elípticas

Las Cópulas Elípticas son las que mayor aplicación han tenido en los mercados financieros. La particularidad de estas Cópulas es que son aquellas que se encuentran asociadas a variables aleatorias cuya función de distribución multivariada es simétrica, lo cual conlleva a que las curvas de nivel que se crean mediante este tipo de Cópulas tienen forma Elíptica. Dentro de esta familia de Cópulas dos son las de mayor importancia; la Cópula normal y la Cópula t-Student, las cuales derivan funciones de distribución multivariadas que poseen estos mismos nombres.

3.6 Cópula normal

La Cópula normal se deriva de una distribución normal multivariada. La Cópula normal proporciona un entorno natural de la generalización de distribuciones normales multivariadas.

Φ denota la distribución normal (acumulada) y $\Phi_{\rho,n}$ denota la distribución normal estándar n-dimensional con matriz de correlación ρ .

La n-Cópula normal con matriz de correlación ρ es:

$$C_{\rho,n}(u_1, u_n) = \Phi_{\rho,n}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) \quad (12)$$

Cuya densidad es:



$$c_{\rho,n}(u_1, u_n) = \frac{1}{\sqrt{\det \rho}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^t(u)(\rho^{-1} - \text{Id})y(u)\right) \quad (13)$$

Tal que $y^t(u) = (\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))$

La Cópula normal está completamente determinada por el conocimiento de la matriz del coeficiente de correlación ρ .

3.7 Cópula t-Student

La Cópula t-Student se deriva de la distribución multivariada t-Student. Proporciona una generalización natural de las distribuciones multivariadas t-Student.

Sea una distribución t-Student n-dimensional $T_{n,p,v}$ con v grados de libertad y una matriz de correlación ρ .

$$T_{n,p,v} = \frac{1}{\sqrt{\det \rho}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) (\pi v)^{n/2}} \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^t \rho^{-1} x}{v}\right)^{\frac{v+n}{2}}} \quad (14)$$

La Cópula t-Student es

$$C_{n,\rho,v}(u_1, u_n) = T_{n,p,v}\left(T_v^{-1}(u_1), T_v^{-1}(u_2)\right) \quad (15)$$

Donde T_v es la distribución univariada t-Student con v grados de libertad.

La densidad de la Copula t-Student es

$$c_{n,\rho,v}(u_1, u_n) = \frac{1}{\sqrt{\det \rho}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\right]^{n-1} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{y_k^2}{v}\right)^{\frac{v+1}{2}}}{\left[\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)\right]^n \left(1 + \frac{y^t \rho^{-1} y}{v}\right)^{\frac{v+n}{2}}} \quad (16)$$

Tal que $y^t = (T_v^{-1}(u_1), T_v^{-1}(u_2))$

La descripción de la cópula t-Student se basa en dos parámetros: la matriz de correlación ρ , del mismo modo que el caso normal, y, además, en el número de grados de libertad v .

3.8 Estimación de Parámetros de las Cópulas

Existen diversas metodologías para estimar los parámetros asociados a una Cópula. En esta investigación se hace uso de la estimación a través de máxima verosimilitud. Este mecanismo de estimación puede ser aplicado a cualquier familia de Cópulas ya que obtiene la estimación de los parámetros de la Cópula a través de la maximización de su función de log-verosimilitud. A continuación, se explica a detalle:

Sea una Cópula C , tal que:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (17)$$

Con función de densidad

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \cdot \prod_{j=1}^n f_j(x_j) \quad (18)$$

A continuación, se define el mecanismo de estimación por máxima verosimilitud:

Sea X un vector de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Con función de distribución multivariada F y funciones de distribución marginales continuas F_1, \dots, F_n ; la función de log-verosimilitud se define,

$$l(\theta) = \sum_{j=1}^n \ln c(F_1(x_{j,1}), \dots, F_n(x_{j,n})) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^d \ln f_i(x_{j,i}) \quad (19)$$

Siendo θ el conjunto de parámetros tanto de las marginales como de la Cópula. De esta manera, dados el conjunto de marginales y una cópula, la función de log-verosimilitud es maximizada.

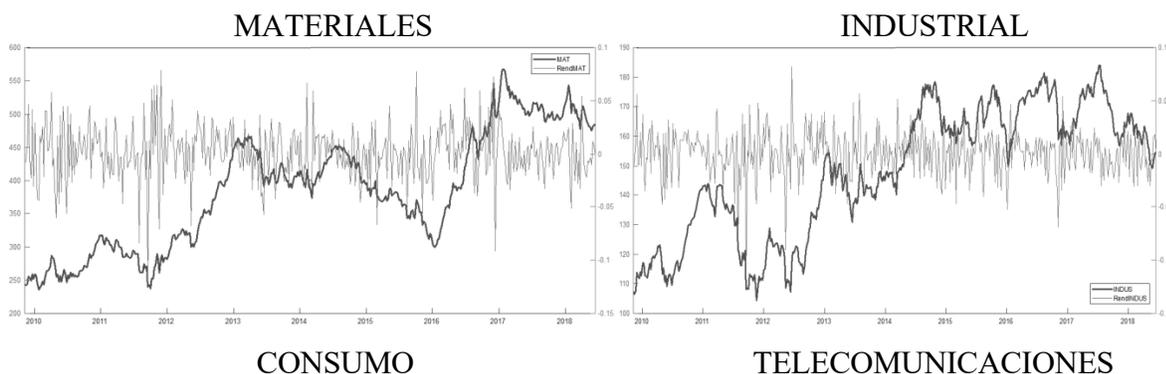
$$\hat{\theta}_{MLE} = \max_{\theta \in \Theta} l(\theta) \quad (20)$$

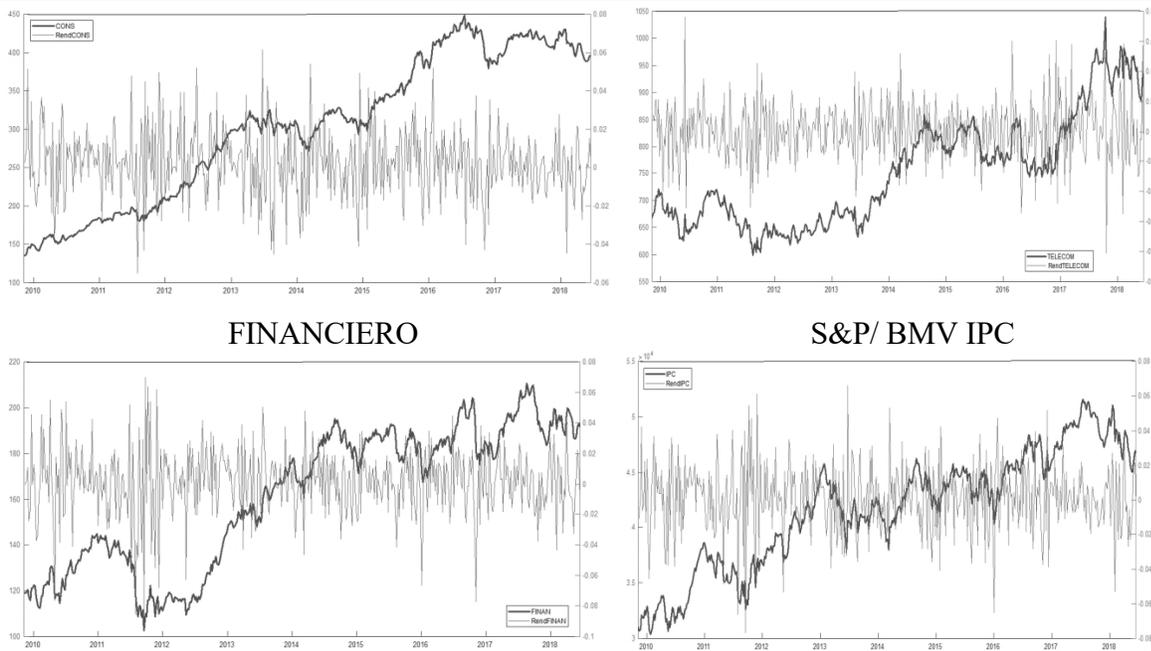
4. Resultados

En esta investigación se consideran los rendimientos históricos semanales de los Índices Sectoriales Invertibles de la BMV y del S&P/BMV IPC, del periodo que abarca de noviembre de 2009 a junio de 2018. Se estiman, estadísticos descriptivos básicos de rendimiento esperado y desviación estándar semanal. Posteriormente, se estima la volatilidad GARCH. Después las matrices de correlación, enseguida, se estiman las matrices de varianzas y covarianzas con la variación Cópula-GARCH. Para finalmente construir tres Portafolios de mínima varianza: i) Portafolio de Markowitz tradicional, ii) Portafolio de Markowitz con variación Cópula-GARCH-Normal, y iii) Portafolio de Markowitz con variación Cópula-GARCH-t-Student.

En la Figura 2 se muestra el comportamiento de los precios y rendimientos del S&P/BMV IPC y de los históricos de los Índices Sectoriales Invertibles de la BMV que conforman el Portafolio. El Índice S&P/BMV IPC nos proporcionara el contraste entre invertir directamente en el Índice del mercado mexicano o en los Portafolios compuestos por los Índices Sectoriales Invertibles de la BMV.

Figura 2. Rendimientos y Precios Semanales de los Índices Sectoriales Invertibles de la BMV





Fuente: *Elaboración propia.*

Previamente a realizar el ajuste mediante los modelos GARCH, se verifica que se tienen datos estacionarios. La Tabla 1 muestra las pruebas de raíces unitarias realizadas a las series temporales de los Índices Sectoriales Invertibles de la BMV.

La Tabla 1 muestra que los rendimientos son estacionarios ya que los p-values son menores a .05, mientras que los precios por tener p-values mayores a .05 no lo son, por lo anterior se procede a estimar los modelos GARCH.

La Tabla 2 presenta los resultados en rendimiento esperado, desviación estándar; y volatilidad para los modelos GARCH Elípticos de los Índices Sectoriales Invertibles de la BMV.

Y en la Figura 3 podemos constatar el comportamiento de la varianza condicional estimada mediante los modelos GARCH propuestos.

Tabla 1. Pruebas de Raíces Unitarias a los Rendimientos y Precios de los Índices Sectoriales Invertibles de la BMV

		Rendimientos (1ra diferencia)		Precios (niveles)	
		Dickey-Fuller Aumentada	Phillips- Perron	Dickey-Fuller Aumentada	Phillips- Perron
MATERIALES	Constante	1.0000e-03	1.0000e-03	0.5433	0.5433
	Cons y Tend	1.0000e-03	1.0000e-03	0.5529	0.5530
	Ninguna	1.0000e-03	1.0000e-03	0.8925	0.8925
INDUSTRIAL	Constante	1.0000e-03	1.0000e-03	0.2686	0.2686
	Cons y Tend	1.0000e-03	1.0000e-03	0.3751	0.3751
	Ninguna	1.0000e-03	1.0000e-03	0.8010	0.8010
CONSUMO	Constante	1.0000e-03	1.0000e-03	0.5161	0.5161
	Cons y Tend	1.0000e-03	1.0000e-03	0.6911	0.6911
	Ninguna	1.0000e-03	1.0000e-03	0.9779	0.9779
TELECOM	Constante	1.0000e-03	1.0000e-03	0.5856	0.5856
	Cons y Tend	1.0000e-03	1.0000e-03	0.0653	0.0653
	Ninguna	1.0000e-03	1.0000e-03	0.8394	0.8394
FINANCIERO	Constante	1.0000e-03	1.0000e-03	0.5686	0.5686
	Cons y Tend	1.0000e-03	1.0000e-03	0.3185	0.3185
	Ninguna	1.0000e-03	1.0000e-03	0.8752	0.8752

Fuente: *Elaboración propia.*

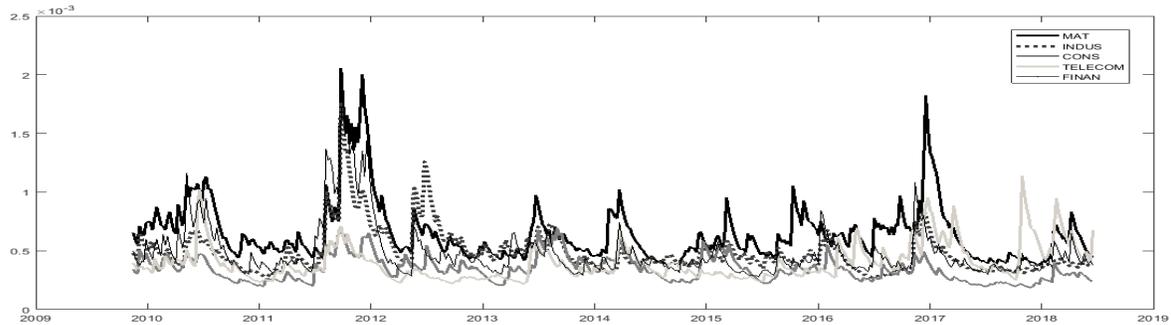
Tabla 2. Estadísticos Descriptivos y Volatilidad vía el Modelo GARCH de los Índices Sectoriales Invertibles de la BMV

	MATERIALES	INDUSTRIAL	CONSUMO	TELECOM	FINANCIERO
Rendimiento esperado	0.001527	0.000810	0.002391	0.000707	0.001065
Desviación estándar	0.025529	0.021948	0.018412	0.019828	0.022289
Volatilidad GARCH normal	0.025438	0.022119	0.018471	0.020421	0.021836
Volatilidad GARCH t-Student	0.025717	0.021546	0.018392	0.020207	0.022017

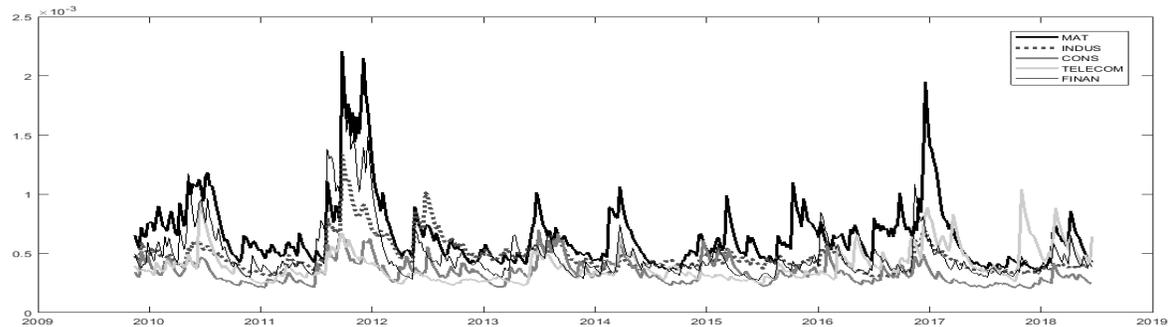
Fuente: *Elaboración propia.*

Figura 3. Varianza condicional de los índices Sectoriales Invertibles de la BMV mediante modelos GARCH

3A. Varianza condicional mediante el modelo GARCH normal



3B. Varianza condicional mediante el modelo GARCH t-Student



Fuente: *Elaboración propia.*

Las matrices de correlación y de varianzas-covarianzas con correlación lineal de Pearson para el modelo tradicional se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Matriz de Correlación y de Varianzas-Covarianzas de los Rendimientos de los Índices Sectoriales Invertibles de la BMV

3A. Matriz de Correlación					
	MATERIALES	INDUSTRIAL	CONSUMO	TELECOM	FINANCIERO
MATERIALES	1	0.6589387811	0.5735112568	0.5010433585	0.6194872117
INDUSTRIAL	0.6589387811	1	0.6369735018	0.4757483192	0.6667903407
CONSUMO	0.5735112568	0.6369735018	1	0.4870457030	0.6245005576
TELECOM	0.5010433585	0.4757483192	0.4870457030	1	0.4946457736
FINANCIERO	0.6194872117	0.6667903407	0.6245005576	0.4946457736	1

3B. Matriz de Varianzas-Covarianzas					
	MATERIALES	INDUSTRIAL	CONSUMO	TELECOM	FINANCIERO
MATERIALES	0.0006517437	0.0003692090	0.0002695776	0.0002536311	0.0003524969
INDUSTRIAL	0.0003692090	0.0004817012	0.0002574031	0.0002070403	0.0003261840
CONSUMO	0.0002695776	0.0002574031	0.0003390057	0.0001778124	0.0002562836
TELECOM	0.0002536311	0.0002070403	0.0001778124	0.0003931674	0.0002186088
FINANCIERO	0.0003524969	0.0003261840	0.0002562836	0.0002186088	0.0004967857

Fuente: *Elaboración propia.*

Tabla 4. Matriz de Correlación y Matriz de Varianzas -Covarianzas ajustadas con Cópula normal y GARCH normal de los Rendimientos de los Índices Sectoriales Invertibles de la BMV
4A. Matriz de Correlación (Parámetros de la Cópula normal)

	MATERIALES	INDUSTRIAL	CONSUMO	TELECOM	FINANCIERO
MATERIALES	1	0.6589387809	0.5735112579	0.5010433576	0.6194872115
INDUSTRIAL	0.6589387809	1	0.6369735029	0.4757483194	0.6667903413
CONSUMO	0.5735112579	0.6369735029	1	0.4870457042	0.6245005593
TELECOM	0.5010433576	0.4757483194	0.4870457042	1	0.4946457734
FINANCIERO	0.6194872115	0.6667903413	0.6245005593	0.4946457734	1

4B. Matriz de Varianzas-Covarianzas (Parámetros Cópula normal y Volatilidad GARCH normal)

	MATERIALES	INDUSTRIAL	CONSUMO	TELECOM	FINANCIERO
MATERIALES	0.0006471038	0.0003707648	0.0002694825	0.0002602771	0.0003441066
INDUSTRIAL	0.0003707648	0.0004892525	0.0002602493	0.0002148906	0.0003220546
CONSUMO	0.0002694825	0.0002602493	0.0003411955	0.0001837152	0.0002518884
TELECOM	0.0002602771	0.0002148906	0.0001837152	0.0004170109	0.0002205676
FINANCIERO	0.0003441066	0.0003220546	0.0002518884	0.0002205676	0.0004768123

Fuente: *Elaboración propia.*

A continuación, se obtienen las matrices, pero con la variación Cópula-GARCH Elípticas para la Cópula normal y t-Student en los ajustes se consideran marginales normales y t-Student respectivamente. Lo anterior se puede visualizar en las Tablas 4 y 5.

Tabla 5. Matriz de Correlación y Matriz de Varianzas-Covarianzas ajustadas con Cópula t-Student y GARCH t-Student de los Rendimientos de los Índices Sectoriales Invertibles de la BMV

5A. Matriz de Correlación (Parámetros de la Cópula t-Student)

	MATERIALES	INDUSTRIAL	CONSUMO	TELECOM	FINANCIERO
MATERIALES	1	0.6596024563	0.5754331129	0.5020142757	0.6208238626
INDUSTRIAL	0.6596024563	1	0.6359678675	0.4763421291	0.6670673355
CONSUMO	0.5754331129	0.6359678675	1	0.4874573000	0.6246091469
TELECOM	0.5020142757	0.4763421291	0.4874573000	1	0.4953553677
FINANCIERO	0.6208238626	0.6670673355	0.6246091469	0.4953553677	1

5B. Matriz de Varianzas-Covarianzas (Parámetros Cópula t-Student y Volatilidad GARCH t-Student)

	MATERIALES	INDUSTRIAL	CONSUMO	TELECOM	FINANCIERO
MATERIALES	0.0006613401	0.0003654737	0.0002721621	0.0002608700	0.0003515041
INDUSTRIAL	0.0003654737	0.0004642190	0.0002520095	0.0002073844	0.0003164322
CONSUMO	0.0002721621	0.0002520095	0.0003382523	0.0001811560	0.0002529171
TELECOM	0.0002608700	0.0002073844	0.0001811560	0.0004083112	0.0002203749
FINANCIERO	0.0003515041	0.0003164322	0.0002529171	0.0002203749	0.0004847290

Fuente: *Elaboración propia.*

En la Tabla 6 se muestran las ponderaciones de los Portafolios diversificados de mínima varianza compuestos por los Índices Sectoriales Invertibles de la BMV. Se observan las ponderaciones tomando en cuenta el modelo tradicional de Markowitz, Cópula-GARCH normal y Cópula-GARCH-t-Student.

Tabla 6. Portafolio de Mínima Varianza de los índices Sectoriales Invertibles de la BMV

Índices	Ponderación	Ponderación Cópula-GARCH normal	Ponderación Cópula-GARCH-t-Student
MATERIALES	0	0	0
INDUSTRIAL	0.097189365	0.085404849	0.119429389
CONSUMO	0.458993694	0.465168473	0.455700310
TELECOM	0.377829736	0.344669062	0.349424356
FINANCIERO	0.065987204	0.104757617	0.075445947
SUMA	1	1	1

Fuente: *Elaboración propia.*

En la Tabla 6 es importante notar que el algoritmo para cada uno de los casos propuestos descarta la inversión en el índice de Materiales. Asimismo, es relevante notar, las ponderaciones son diversas.

En la Tabla 7 se presenta la relación riesgo-rendimiento para cada tipo de Portafolio de mínima varianza.

Tabla 7. Riesgo y Rendimiento en el Portafolio de Mínima Varianza de los índices Sectoriales Invertibles de la BMV

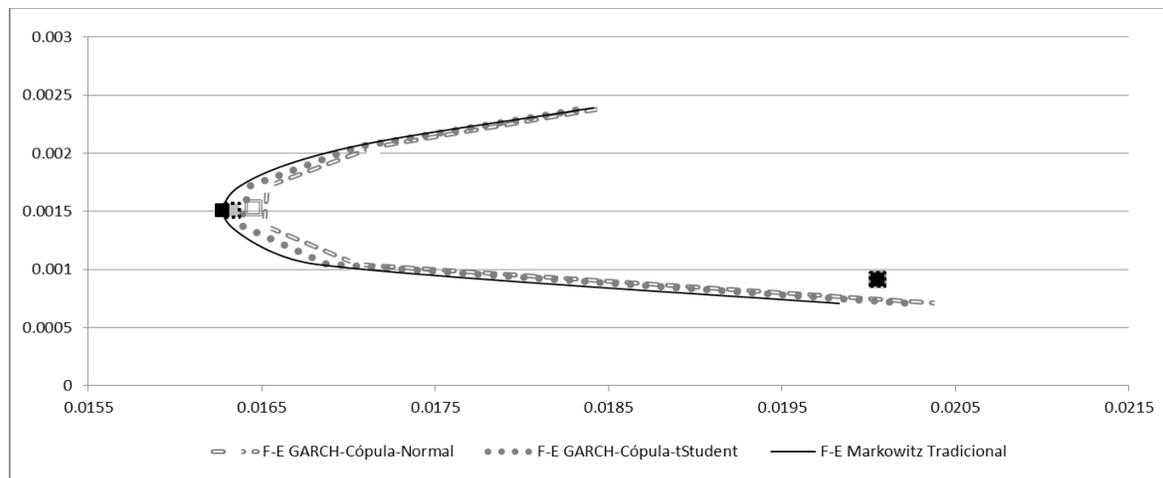
Portafolio de mínima varianza	Desviación Estándar	Rendimiento Esperado
Markowitz tradicional	0.016269989	0.001513622
GARCH normal y Cópula normal	0.016451387	0.001536698
GARCH t-Student y Cópula t-Student	0.016328530	0.001513747
S&P/ BMV IPC	0.020049671	0.000914243

Fuente: *Elaboración propia.*

La información reflejada en la Tabla 7 se puede apreciar en la Figura 4, donde se observan las tres fronteras eficientes generadas a través de los Portafolios analizados. Se resalta la diferencia en los valores estimados de mínima varianza. Por lo que es claro que el modelo tradicional de Portafolios de

Markowitz aplicado a los Índices Sectoriales Invertibles de la BMV subestima el riesgo, en comparación a los Portafolios ajustados con Cópula-GARCH.

Figura 4. Frontera Eficiente de los Portafolios conformados por los Índices Sectoriales Invertibles de la BMV



Fuente: *Elaboración propia.*

Asimismo, podemos también observar a través de la Figura 4 que el rendimiento esperado del S&P/BMV IPC está por debajo de los Portafolios de mínima varianza (vértices de las parábolas) conformados por los Índices Sectoriales Invertibles de la BMV; por lo que el riesgo estimado es menor al del propio mercado.

5. Conclusiones

Esta investigación considera tres tipos de Portafolios (tradicional y con variación Cópula-GARCH Elípticos) compuestos por los Índices Sectoriales Invertibles de la BMV. Al contrastar las fronteras eficientes obtenidas se concluye empíricamente que el modelo tradicional de Portafolios de Markowitz aplicado a los Índices Sectoriales Invertibles de la BMV subestima el riesgo, en comparación a los Portafolios ajustados con Cópula-GARCH. Sin embargo, para los tres tipos de Portafolios los niveles de riesgo son mucho menores que el observado por el S&P/BMV IPC.



Es importante resaltar que esta investigación al considerar Portafolios con modelos de Cópulas-GARCH Elípticas rompen el supuesto de volatilidad constante del modelo tradicional; la ruptura de este supuesto a través de estos modelos de Cópulas conlleva a que exista una mejor adecuación del modelo a la realidad, es decir, al observar la no subestimación del riesgo. Para futuras investigaciones se puede romper el supuesto de normalidad en ambos modelos e incorporar un activo libre de riesgo.

6. Referencias

- Bachelier, L. (1900). *Théorie de la Spéculation Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure Sér*, Paris.
- Badaye, H., y Narsoo, J. (2020). "Forecasting multivariate VaR and ES using MC-GARCH-Copula model". *Journal of Risk Finance*, 21 (5) pp. 493-516. Recuperado de: <https://doi.org/10.1108/JRF-06-2019-0114>
- Fama, E.F. (1965). "The behavior of stock market prices". *Journal of Business*, 38 (1) pp. 34-105.
- Gibson, G. (1889). *The Stock Exchanges of London Paris and New York*, G. P, New York: Putnman & Sons.
- Gong, X., Liu, X., y Xiong, X. (2019). "Measuring tail risk with GAS time varying copula, fat tailed GARCH model and hedging for crude oil futures". *Pacific-Basin Finance Journal*, 55 pp. 95-109.
- Happersberger, D., Lohre, H., y Nolte, I. (2020). "Estimating portfolio risk for tail risk protection strategies". *European Financial Management*, 26 (4) pp. 1107-1146. Recuperado de: <https://doi.org/10.1111/eufm.12256>
- Lin, S., Chen, R., Lv, Z., Zhou, T., y Jin, C. (2019). "Integrated measurement of liquidity risk and market risk of company bonds based on the optimal Copula model". *The North American Journal of Economics and Finance*, 50. Recuperado de: <https://doi.org/10.1016/j.najef.2019.101004>
- Lintner, J. (1965). The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47 (1) pp. 13-37. Recuperado de: <https://doi.org/10.2307/1924119>
- Liu, J., Song, Q., Qi, Y., Rahman, S., y Sriboonchitta, S. (2020). "Measurement of Systemic Risk in



- Global Financial Markets and Its Application in Forecasting Trading Decisions”. *Sustainability*, 12 (10) pp. 1-15. Recuperado de: <https://ideas.repec.org/a/gam/jsusta/v12y2020i10p4000-d357862.html>
- Louhichi, W., y Rais, H. (2019). “Refinement of the hedging ratio using copula-GARCH models”. *Journal of Asset Management*, 20 (5) pp. 403-411. Recuperado de: https://ideas.repec.org/a/pal/assmgt/v20y2019i5d10.1057_s41260-019-00133-5.html
- Luenberger, D.G. (1998). *Investment Science*. UK: Oxford University Press.
- Markowitz, H. (1952). “Portfolio Selection”. *Journal of Finance*, 7 (1) pp. 77-91. Recuperado de: <https://doi.org/10.2307/2975974>
- Mossin, J. (1966). “Equilibrium in a Capital Asset Market”. *Econometrica*, 34 (4) pp.768-783. Recuperado de: <https://doi.org/10.2307/1910098>
- Sharpe, W. F. (1963). “A Simplified Model for Portfolio Analysis”. *Management Science* 9 (2) pp. 277-293. Recuperado de: <http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.9.2.277>
- Sharpe, W. F. (1970). *Portfolio Theory and Capital Markets*. New York: McGraw Hill.
- Sklar, A. (1959). “Fonctions de Répartition à n Dimensions et Leurs Marges”. *Publications de l’Institut Statistique de l’Université de Paris*, 8 pp. 229-231. Recuperado de: [https://www.scrip.org/\(S\(351jmbntvnsjt1aadkposzje\)\)/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=1834923](https://www.scrip.org/(S(351jmbntvnsjt1aadkposzje))/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=1834923)
- Sun, X., Liu, C., Wang, J., y Li, J. (2020). "Assessing the extreme risk spillovers of international commodities on maritime markets: A GARCH-Copula-CoVaR approach”, *International Review of Financial Analysis*, 68 pp. Recuperado de: <https://ideas.repec.org/a/eee/finana/v68y2020ics1057521919303904.html>
- Tobin, J. (1958). “Liquidity Preference as Behavior Towards Risk”. *Review of Economic Studies*, 25 (2) pp. 65-86. Recuperado de: <https://doi.org/10.2307/2296205>
- Treynor, J. I. (1962). *Toward a Theory of Market Value of Risk Assets*. Unpublished Manuscript. Finally published in 1989 en *Asset Pricing and Portfolio Performance*. R. A. Korajkzic. Londres: Risk Books. pp. 15-22.
- Xu, Y., y Lien, D. (2020). Optimal futures hedging for energy commodities: An application of the GAS model. *The Journal of Futures Markets*. 40 (7) pp. 1090-1108. Recuperado de: <https://doi.org/10.1002/fut.22118>