Revista de Investigación en Ciencias Contables y Administrativas
(Journal of Research in Accounting and Management Science)
Vol. 8, Num. 2, 2023

Determinación de la prima de riesgo asociado a la deuda corporativa mediante un modelo de difusión con saltos

Luz Marina Hernández-Bautista
Escuela Superior de Economía
luzmar_e-123@hotmail.com

Francisco Venegas-Martínez
Escuela Superior de Economía
fvenegas1111@yahoo.com.mx

Ambrosio Ortiz-Ramírez
Escuela Superior de Economía
amortiz@ipn.mx

Recibido el 03 de enero del 2023; Aceptado el 06 de marzo del 2023; En línea el 24 de mayo del 2023

Resumen:

El modelo de Merton (1976) supone que una empresa que se financia mediante recursos propios, representados por una acción, y recursos ajenos o deuda, caracterizada por un bono cupón cero. Tanto la acción como el bono se negocian en un mercado bajo los siguientes supuestos: 1) no hay arbitraje, 2) no hay costos de transacción (comisiones e impuestos), and 3) no hay restricciones a las ventas en corto. Esta investigación propone una extensión del modelo de Merton (1976) que consiste en suponer que el valor de capitalización y la deuda tienen un comportamiento de difusión con saltos. Los parámetros de los modelos de difusión con saltos se estiman mediante máxima verosimilitud con datos del periodo 2016-2018. Posteriormente se obtiene la estructura de plazos de un bono corporativo con riesgo de tal forma que se puede calcular la prima de riesgo en presencia de saltos con. La extensión propuesta se aplica a instituciones de la banca múltiple mexicana, particularmente a BBVA, Banorte y Santander, con precios diarios sus acciones y el monto de sus deudas. Se concluye que entre mayor sea la prima, mayor será la probabilidad de incumplimiento de la empresa. Por último, se proporciona un conjunto de recomendaciones en materia de política bancaria para evitar el colapso de la banca mexicana bajo un escenario extremo.

Palabras Claves: riesgo crediticio, acciones, bonos, deuda, deuda corporativa, prima de riesgo.

Códigos JEL: G32, G33, G13, H54.

Determination of the risk premium associated with corporate debt using a diffusion model with jump

Abstract:
Merton's (1976) model assumes a company is financed with its own resources, represented by a share, and external resources or debt, characterized by a zero coupon bond. Both the stock and the bond are traded in a market under the following assumptions: 1) there is no arbitrage, 2) there are no transaction costs (commissions and taxes), and 3) there are no restrictions on short sales. This research proposes an extension of the Merton (1976) model, which consists in assuming that the capitalization value and the debt have a diffusion behavior with jumps. The parameters of the jump diffusion models are estimated using the maximum likelihood with data from the period 2016-2018. Subsequently, the term structure of a risky corporate bond is obtained in such a way that the risk premium can be calculated in the presence of jumps. The proposed extension applies to Mexican multiple banking institutions, particularly BBVA, Banorte and Santander, with daily prices for their shares and the amount of their debts. It is concluded that the higher the premium, the greater the probability of default of the company. Finally, a set of banking policy recommendations is provided to avoid the collapse of Mexican banks under an extreme scenario.

Keywords: credit risk, stocks, bonds, debt, corporate debt, risk premium.
JEL Codes: G32, G33, G13, H54

.

1. Introducción

Si uno o varios de los bancos mexicanos llegaran a quebrar, la economía mexicana podría colapsarse. Se asevera que ante este escenario extremo, los clientes retirarían su dinero de los bancos de forma masiva generando una situación de pánico que se extendería hacia los otros mercados financieros (capitales, deuda, divisas y derivados) creando, sin duda, una crisis financiera sistémica en el país. En caso de quiebra de un banco o varios, estos cerrarían y el Instituto para la Protección al Ahorro Bancario (IPAB) que se encarga de proteger el dinero depositado en cualquiera de los bancos que operan en México haría un pago topado a los clientes; hasta por una cantidad de hasta 400 mil UDIs por cada cuenta que tenga el cliente en diferentes bancos.

Afortunadamente en México, de acuerdo a la información provista de la CNBV, la estabilidad del sistema financiero hace poco probable que se presente una corrida bancaria. Esto se debe a que ninguna institución bancaria atraviesa por problemas de solvencia o liquidez, y por el contrario todas cuentan con índices de capitalización superior a 10%, nivel por arriba de las recomendaciones de entidades reguladoras nacionales e internacionales. No obstante, es importante estimar la probabilidad de incumplimiento de las instituciones de banca múltiple en México aunque este sea un caso remoto. Cuando dicha probabilidad de incumplimiento es muy pequeña (cercana a cero), esto se interpreta como certidumbre para los usuarios de la banca comercial.

Por lo anterior, cuando la banca múltiple tiene obligaciones con los accionistas y con los acreedores (Gómez, 2007) es relevante para estos agentes estimar la probabilidad de incumplimiento. A partir de la estimación de la diferencia entre el valor estimado de los activos en el futuro y el valor de la deuda, el modelo de Merton permite estimar la probabilidad de incumplimiento o quiebra, y el default tendrá lugar si los activos no son suficientes para cubrir los pasivos.

El modelo de Merton (1976) relaciona la probabilidad de quiebra con la teoría de valuación de opciones y la estructura de capital de las empresas, ya que analiza el valor de las acciones como una opción de compra de tipo europeo sobre el valor de los activos de la empresa y establece que el default tendría lugar cuando los activos de la empresa son inferiores a los pasivos (Avellaneada y Zhu, 2001). Esta relación permite hacer una aproximación al valor histórico de los activos a partir del precio de cotización de las acciones y permite estimar el punto en el que un corporativo entraría en default.

Esta investigación propone una extensión del modelo de Merton (1976) en la que valor de capitalización y la deuda tienen ambos un comportamiento de difusión con saltos. Posteriormente se obtiene la estructura de plazos de un bono corporativo con riesgo de tal manera que se pueda calcular la prima de riesgo en presencia de discontinuidades o saltos que ocasionalmente se presentan en los mercados accionarios y de deuda. Por último, la extensión propuesta se aplica a instituciones de la banca múltiple mexicana, particularmente a BBVA, Banorte y Santander.

Las principales contribuciones de la presente investigación consisten en: 1) la incorporación de un proceso de Poisson en la probabilidad de incumplimiento, 2) la aplicación de la extensión propuesta a la banca múltiple mexicana, y 3) la recomendación de varias políticas bancarias para evitar el colapso de la banca mexicana en una situación extrema.

La presente investigación está organizada de la siguiente manera: en la sección 2 se introduce el proceso de difusión con saltos; en la sección 3 se presenta el modelo de riesgo crédito de Merton (1974); en la sección 4 se presenta, brevemente, el modelo de Merton (1973) para valuar opciones financieras con discontinuidades; en la sección 5 se desarrolla la propuesta de extensión; en la sección 6 se realiza la aplicación de la propuesta; por último, en la sección 7 se dan las conclusiones.

2. El proceso de Poisson y Lema de Itô para saltos

Como se mencionó antes, esta investigación se concentra en la inclusión del proceso de Poisson en el modelo de Merton (1976). Un proceso de Poisson con intensidad $\lambda > 0$ es una colección de variables aleatorias $N_t,\ t \geq 0$, definidas en un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que satisfacen las siguientes propiedades:

(i) $\mathbb{P}(N_0 = 0) = 1$, esto es, N_0 es siempre 0.

(ii) Para todo $0 < s < t, N_t - N_s$ tiene distribución de Poisson con intensidad $\lambda(t - s)$.

(iii) Para todo $0 \leq t_0 \leq t_1 < \cdots < t_n$, con $n \geq 1$, (es decir, para todo conjunto finito de tiempos), las variables aleatorias $N_{t_n} - N_{t_{-1}}, \dots, N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_1} - N_{t_0}$, son independientes. Esta propiedad se conoce como propiedad de incrementos independientes.

Por otro lado, el modelo de difusión con saltos considera un proceso estocástico en tiempo continuo cuyo antecedente es el modelo propuesto por (Black y Scholes, 1973). En este modelo si $S(t)$ es el precio del activo en el tiempo t, μ es el rendimiento medio esperado anualizado del activo (parámetro de tendencia), σ^2 es la varianza anualizada de los rendimientos del activo y W_t es un proceso de Browniano estándar (movimiento browniano), se sigue que:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{1}$$

La solución de esta ecuación diferencial estocástica se obtiene a partir de la teoría del cálculo estocástico propuesta por Itô (1951). El modelo de difusión con saltos planteado por Merton (1976) tiene un término adicional vdP_t en la ecuación (1), donde P_t es un proceso de Poisson y v es la magnitud de los saltos. El modelo de Merton incluye las discontinuidades o saltos que presentan los precios ocasionalmente los precios de los activos. En su planteamiento inicial, se supone que la magnitud promedio de los saltos, v, es constante en el tiempo, dando como resultado la siguiente ecuación.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t + vdP_t \tag{2}$$

El lema de Itô para procesos de difusión con saltos establece que si $c = c(S_t, t)$ una función dos veces diferenciable, con segundas derivadas parciales continuas, entonces la diferencial estocástica de $c(S_t, t)$ está dada por (Venegas-Martínez, 2008; Venegas-Martínez y Fundia-Aizenstat, 2016; y Venegas-Martínez *et al*., 2016)):

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)dt + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t dW_t + [c(S_t(1+v),t) - c(S_t,t)]dN_t \tag{3}$$

Merton propone un modelo en el que relaciona el riesgo de default con la estructura de capital de las empresas. Según el modelo de Merton, una empresa con responsabilidad limitada estará en default cuando el valor de sus activos sea inferior al valor de sus pasivos. De la identidad contable, y del supuesto según el cual los accionistas reciben el valor residual de la empresa, si los pasivos superan el valor de los activos, el valor del patrimonio será nulo y se espera que la empresa ejerza la opción de declararse en default (Merton, 1974). Esta opción que tiene la empresa se puede evaluar a través de la teoría de opciones financieras. La aplicación de la teoría de opciones financieras en la estimación del riesgo de default es de gran utilidad porque establece una relación entre variables no observadas y variables observadas.

3. El modelo de riesgo crédito de Merton

El modelo de Merton (1976) supone que:

(1) El mercado es perfecto y libre de fricciones, es decir, muchos inversores pueden vender al descubierto y comprar más de lo que ellos poseen en tiempo continuo.

(2) La estructura de plazos de las tasas de interés es plana y la tasa de interés es la misma para prestatarios y prestamistas en todo momento (la tasa activa es igual a la tasa pasiva).
(3) El valor de mercado del corporativo es invariante a su estructura de capital.
(4) Una empresa se puede financiar con capital propio y deuda (D) que vence en el tiempo T, tanto el capital propio como la deuda se negocian en el mercado.

El incumplimiento se presenta cuando el valor de los activos es inferior al monto total de la deuda. El valor de los activos se considera como una opción europea de compra que tiene como precio de ejercicio el monto de la deuda. Posteriormente se utiliza la fórmula de valuación de opciones de Black y Scholes (1973) para calcular la probabilidad de incumplimiento. El modelo de Merton supone que una empresa emite bonos cupón cero que vencen en una fecha T (Venegas-Martínez, 2008). A continuación se definen las variables que participan en el modelo de Merton (1976):

t: es la fecha de referencia, es decir, hoy.
T: es la fecha de vencimiento.
S_t: es el valor de mercado de las acciones de la empresa, hoy.
S_T: es el valor de mercado de las acciones de la empresa en T.
$B_c(t, T)$: es el valor de mercado de los bonos de la empresa, hoy.
V_t: será el valor de mercado de los títulos, de capital y deuda de la empresa, hoy.
V_T: será el valor de mercado de los títulos, de capital y deuda de la empresa, en T.
D: es el principal e interés que la empresa debe pagar en T.
σ_S: es la volatilidad de las acciones de la empresa.
σ_V: es la volatilidad del valor de la empresa en el mercado.

Primero se definirá V_t, el cual está compuesto por el valor de mercado de las acciones (S_t) y el valor de mercado de los bonos (B_c) de la empresa, es decir;

$$V_t = S_t + B_c(t, T) \quad (4)$$

Además, se supone que:

$$dV_t = \mu_V V_t dt + \sigma_V V_t dW_t \quad (5)$$

y

$$dS_t = \mu_S S_t dt + \sigma_S S_t dW_t. \quad (6)$$

Dado que el proceso $(W_t)_{t\in[0,T]}$ es el mismo movimiento Browniano, existe una correlación perfecta entre las ecuaciones (6) y (7). En otras palabras, las ecuaciones (6) y (7) expresan que los cambios en el valor de la empresa y en el valor de mercado de las acciones tienen el mismo factor de riesgo. Una limitación de la ecuación (5) es que los parámetros $\mu_V V_t$ y $\sigma_V V_t$ no son observables.

Si el valor del corporativo en el tiempo T es menor que la deuda, $V_T < D$, entonces el corporativo incumple, por lo menos parcialmente, con el pago de su deuda, y en este caso $S_T = 0$. Si por el contrario $V_T \geq D$, la empresa paga su deuda en T y

$$S_T = V_T - D. \tag{7}$$

Todo lo anterior se resume en

$$S_T = \max(V_T - D, 0) \tag{8}$$

La ecuación anterior muestra que el valor de mercado de las acciones puede verse como una opción europea de compra sobre el valor de mercado de la empresa con precio de ejercicio igual al pago de su deuda. La fórmula de Black-Scholes (1973) proporciona el valor inicial de las acciones de la empresa en t, en un mundo neutral al riesgo, el cual está dado por:

$$S_t = V_t\Phi(d_1) - De^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \tag{9}$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}} \qquad \text{y} \qquad d_2 = d_1 - \sigma_V\sqrt{T-t} \tag{10}$$

El valor de la deuda hoy es $B_c(t,T) = V_t - S_t$. En este caso, la aproximación probabilista a la valuación de activos conduce a:

$$\begin{aligned} S_t &= e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\max(v-D,0)f_{V_T|V_t}(v|V_t)dv \\ &= e^{-r(T-t)}\int_{D}^{\infty}(v-D,0)f_{V_T|V_t}(v|V_t)dv \\ &= e^{-r(T-t)}\int_{D}^{\infty}vf_{V_T|V_t}(v|V_t)dv - De^{-r(T-t)}\int_{\{v>D\}}f_{V_T|V_t}(v|V_t)dv \\ &= e^{-r(T-t)}E\left[V_T 1_{\{V_T>D\}}\middle|V_t\right] - De^{-r(T-t)}\mathbb{P}\{V_T > D|V_t\} \end{aligned} \tag{11}$$

Donde $f_{V_T|V_t}(v|V_t)$ es la función de densidad de V_T, condicional al valor inicial v_t. Siguiendo la ecuación (11), la probabilidad neutral al riesgo, de que la empresa cumpla con el pago de su deuda es:

$$\mathbb{P}\{V_T > D|V_t\} = \Phi(d_2)$$

Siendo Φ la función de distribución normal estándar. Por lo tanto, la probabilidad de que la empresa incumpla con el pago de su deuda es:

$$\mathbb{P}\{V_T < D|V_t\} = 1 - \Phi(d_2) = \Phi(-d_2) = \int_{-\infty}^{-d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Para poder calcular esta probabilidad, se requiere conocer a σ_V y a V_t. Sin embargo, ninguna de estas dos cantidades es directamente observable. No obstante, si la empresa emite acciones que son colocadas públicamente, entonces S_t puede estimarse como el número total de acciones registradas en la serie por su precio en el mercado.[1] En este caso, se tiene que si $S_t = S_t(V_t, t)$, se sigue que:

$$\mu_S S_t dt + \sigma_S S_t dW_t = \left(\frac{\partial S_t}{\partial t} + \mu_V V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t} + \frac{1}{2}\sigma_V^2 V_t^2 \frac{\partial^2 S_t}{\partial V_t^2}\right) dt + \sigma_V V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t} dW_t \qquad (12)$$

Como las componentes estocásticas deben ser iguales se sigue que:

$$\sigma_S S_t = \sigma_V V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t}$$

Equivalentemente,

$$\sigma_S S_t = \sigma_V V_t \Phi(d_1) \qquad (13)$$

Si se cuenta con un estimador de σ_S, la desviación estándar de los rendimientos, entonces (13) es otra ecuación que deben satisfacer σ_V y V_t, por lo que las ecuaciones (9) y (13) proporcionan un sistema de ecuaciones simultáneas para las variables σ_V y V_t. Además, las partes deterministas de (12) implican:

$$\mu_S S_t = De^{-r(T-t)}\left(-r\Phi(d_2) + \frac{\sigma_V \Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}}\right) + \mu_V \sigma_V \Phi(d_1) + \frac{\sigma_V V_t \Phi'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} \qquad (14)$$

El sistema de ecuaciones de (9) y (13) da los valores de σ_V y V_t, los cuales se sustituyen en (14) para obtener el valor de μ_V. Si se sustituye la ecuación (9) en (5), se tiene que el precio del título de deuda es:

$$\begin{aligned}
B_c(t,T) &= V_t - S_t \\
&= V_t - \left(V_t\Phi(d_1) - De^{-r(T-t)}\Phi(d_2)\right) \\
&= V_t\left(1 - \Phi(d_1)\right) + De^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \\
&= V_t\Phi(-d_1) + De^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \\
&= De^{-r(T-t)}(\Phi(d_2) + m\Phi(-d_1))
\end{aligned}$$

donde

$$m = \frac{V_t}{D} e^{r(T-t)}.$$

[1] Esto quiere decir, que la ecuación (9) proporciona una condición que deben cumplir σ_V y V_t.

Con lo cual, el precio del bono corporativo es el valor presente del principal y los intereses, D, multiplicado por la probabilidad de cumplimiento, $\Phi(d_2)$, más el valor futuro del inverso del nivel de apalancamiento o cobertura de la deuda, m.

Por último, la estructura de plazos del bono corporativo con riesgo, está dada por:

$$
\begin{aligned}
R_c(t,T) &= -\frac{\ln\left(\frac{B_c(t.T)}{D}\right)}{T-t} \\
&= -\frac{1}{T-t}\ln[(\Phi\big(d_2 + m\Phi(-d_1)\big)] \\
&= r - \frac{1}{T-t}\ln[\Phi(d_2) + m\Phi(-d_1)]
\end{aligned}
$$

4. Modelo de Merton (1973) para valuar opciones financieras

Se define una sucesión de variables aleatorias Y_n como el producto de n variables independientes e idénticamente distribuidas a una variable aleatoria lognormal $\nu + 1$, definiendo $Y_0 = 1$. Es decir, si $\{\nu_n + 1\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, se tiene:

$$
\begin{aligned}
Y_0 &= 1 \\
Y_1 &= \nu_1 + 1 \\
Y_2 &= (\nu_1 + 1)(\nu_2 + 1) \\
&\vdots \\
Y_n &= \prod_{k=1}^{n}(\nu_k + 1) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Además, la ecuación diferencial estocástica

$$
\begin{aligned}
&r\left(c - \frac{\partial c}{\partial S_t}S_t\right)dt \\
&= \left(\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right)dt + \left[\big(c(S_t(1+\nu).t) - c(S_t,t)\big) - \frac{\partial c}{\partial S_t}\nu S_t\right]dN_t \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Con las siguientes condiciones de frontera:

$$c(0,t) = 0 \qquad \text{y} \qquad c(S_t,T) = \max(S_t - K, 0)$$

tiene como solución

$$c(S_t,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda(T-t)}[\lambda(T-t)]^n}{n!}E_{Y_n}\left[C_{BS}\big(S_tY_ne^{-\lambda E_\nu[\nu](T-t)}, t;\ \sigma^2, r\big)\right] \qquad (16)$$

donde C_{BS} es la solución básica de Black-Scholes[2]. Por lo tanto,

$$c(S_t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n.t} E_{Y_n}\left[c_{BS}^{(n)}\right]$$

donde:

$$P_{n,t} = \frac{e^{-\lambda(T-t)}[\lambda(T-t)]^n}{n!}$$

$$U_{n,t} = Y_n e^{-\lambda E_\nu[\nu](T-t)}$$

y

$$c_{BS}^{(n)} = C_{BS}^{(n)}(S_t U_{n,t}, t).$$

5. Desarrollo de la propuesta

En lo que sigue se supone que el valor de la empresa tiene un comportamiento que no es totalmente continuo. Para asegurar precios positivos de las acciones, además de independencia y estacionalidad de los log-rendimientos, se modela el precio como una exponencial de un proceso de Lévy (proceso de Poisson) bajo una medida de probabilidad $\mathbb{P}$:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \nu W_t + \ln(1+\nu)N_t}$$

Donde W_t es un movimiento Browniano estándar, N_t es un proceso de Poisson con intensidad λ e independiente de W_t. Este modelo pertenece a la dinámica de un mercado incompleto, pues hay más de una medida $\mathbb{Q}^M \sim \mathbb{P}$ tal que el precio descontado, $\hat{S}_t$, es una martingala. En consecuencia, bajo una medida $\mathbb{Q}^M$:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu^M - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \nu W_t^M + \mathrm{l}\ \ (1+\nu)N_t}$$

Donde W_t^M es un movimiento Browniano estándar, N_t es un proceso de Poisson e independiente de W^M. Se elegirá μ^M de tal forma que $\hat{S}_t = S_t e^{-rt}$ es una martingala bajo $\mathbb{Q}^M$:

$$\mu^M = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \mathbb{E}[e^{N_t} - 1] = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\left[e^{\lambda} - 1\right]$$

---

[2] La ecuación anterior proporciona un valor medio, $c(S_t, t)$, de las primas esperadas, $E_{Y_n}[c_{BS}(\cdot)]$ con respecto a una distribución de Poisson con media $\lambda(T-t)$.

Revista de Investigación en Ciencias Contables y Administrativas
(Journal of Research in Accounting and Management Science)
Vol. 8, Num. 2, 2023

$\mathbb{Q}^M$ es la medida de la martingala equivalente obtenida al cambiar la tendencia del movimiento Browniano, pero dejando la parte de saltos sin cambios[3], esto significa, que las propiedades de riesgo neutral del componente de saltos de S_t son las mismas que las de sus propiedades estadísticas. En particular, la distribución de los tiempos de saltos y los tamaños de los saltos no cambian. Por lo tanto, una opción europea con pago al vencimiento $H(S_t)$ se puede valuar como:

$$C_t^M = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}[H(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

De esta manera, S_t es un proceso de Markov bajo $\mathbb{Q}^M$, el precio de la opción, C_t^M, se puede expresar como una función determinista de t y S_t:

$$\begin{aligned} C_t^M &= C^M(t,S_t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}[(S_T-K)^+|S_t=S] \\ &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[H\left(S * S_0 e^{\left(\mu^M-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\nu W_{T-t}^M+\ln(1+\nu)N_{T-t}}\right)\right] \\ &\qquad - e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[H\left(Se^{\left(\mu^M-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\nu W_{T-t}^M+\ln(1+\nu)N_{T-t}}\right)\right] \end{aligned}$$

Condicionando sobre el número de saltos N_t, se puede expresar a $C(t,S_t)$ como una suma ponderada de precios de Black-Scholes en donde el tiempo de maduración se denota como $\tau = T-t$

$$\begin{aligned} C^M(t,S) &= e^{-r\tau}\sum_{n\geq 0}\mathbb{Q}^M(N_t=n)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}\left[H\left(Se^{\left(\mu^M-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau+\nu W_\tau^M+\ln(1+\nu)n}\right)\right] \\ &= e^{-r\tau}\sum_{n\geq 0}\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^M}\left[H\left(Se^{\lambda t+\frac{\lambda t}{2}-\lambda e^{\lambda t}+\lambda_\tau e^{r\tau}-\frac{\sigma_n\tau}{2}+\nu W_\tau+\mathrm{l}\ \ (1+\nu)n}\right)\right] \\ &= e^{-r}\ \sum_{n\geq 0}\frac{e^{-\lambda_\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}C_H^{BS}(\tau,S_n;\sigma_n) \end{aligned} \tag{17}$$

Donde:

$$\sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{\lambda t}{\tau}$$

$$S_n = Se^{\lambda t\ \ \frac{\lambda\tau}{2}-\lambda_\tau e^{\lambda t}+\lambda_\tau+\ln(1+\nu)n}$$

y

$$C_H^{BS}(\tau,S;\sigma) = e^{-r\tau}\mathbb{E}\left[H\left(Se^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau+\sigma W_\tau}\right)\right]$$

Es el valor de una opción europea con tiempo de maduración τ y pago H en un modelo de Black-Scholes con volatilidad σ. Esta expansión en series converge exponencialmente y se puede usar para

[3] Merton justifico la elección de este modelo bajo la suposición de que el riesgo de un salto es diversificable, entonces no hay prima de riesgo concerniente a éste.

cálculos numéricos de precios en el modelo de Merton para una *n* suficientemente grande. De esta manera, se tiene que el valor de una empresa se descompone como el valor de las emisiones de deuda más el valor del capital:

$$V = F(V,\tau) + f(V,\tau). \tag{18}$$

El valor del capital, $f(V,\tau)$ se calcula como indica la ecuación (17) que corresponde a una opción de compra cuando el subyacente tiene un comportamiento discontinuo. Ahora bien, de la ecuación (18), se obtiene el valor de la deuda, es decir:

$$\begin{aligned}
F(V,\tau) &= V - f(V,\tau)\\
&= V - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau} C_H^{BS}(\tau, V_n; \sigma_n)\\
&= V - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau} \left(V_n N(d_{1,n}) - B e^{-r\tau} N(d_{2,n}) \right) \right)\\
&= V - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau} V_n N(d_{1,n}) + B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau} N(d_{2,n})\\
&= B e^{-r\tau} \left(\frac{V}{B} e^{r\tau} - \frac{e^{r\tau}}{B} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau} V_n N(d_{1,n}) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} N(d_{2,n}) \right)\\
&= B e^{-R(\tau)\tau}
\end{aligned} \tag{19}$$

Por lo tanto,

$$R(\tau) = r - \frac{1}{\tau} \ln \left(\frac{V}{B} e^{r\tau} - \frac{e^{r\tau}}{B} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau} V_n N(d_{1,n}) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} N(d_{2,n}) \right) \tag{20}$$

Esta ecuación proporciona el rendimiento de un bono con riesgo y a partir de ella se puede calcular el riesgo de emisión de bonos del corporativo.

6. Aplicación de la propuesta

En la actualidad, las instituciones financieras juegan un papel crucial para el crecimiento económico, ya que reúne a aquellos que demandan fondos prestables con quienes están dispuestos a ofrecerlos a un cierto precio, y que al hacerlo contribuyen a elevar la eficiencia de una economía. Los demandantes del ahorro cuentan con mejores alternativas de inversión que les permiten alcanzar una rentabilidad mayor de la que podrían obtener por sí mismos los oferentes, quienes en general, carecen de las alternativas de inversión de que disponen aquellos.

Según la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV) define a los grupos financieros BBVA, Citibanamex, Santander, Banorte, HSBC, Inbursa y Scotiabank como las firmas con mayor importancia sistémica en el país. Este organismo, después de una evaluación que realiza anualmente, determinó la importancia de estas siete instituciones de crédito cuya quiebra potencial afectaría la estabilidad del sistema financiero o la economía del país (Hernández, 2017)**.** En esta investigación, se estudiaran sólo los siguientes grupos financieros: BBVA, GFBanorte y Santander.

6.1 Estimación de parámetros

Para poder estimar lo parámetros necesarios en el cálculo de probabilidad de quiebra, se requiere un estimador en la difusión sin saltos y con saltos. Se parte de una serie de tiempo de los precios de las acciones de las empresas $S_1, S_2, \ldots, S_n$. A partir de la cual se obtienen los log-rendimientos $R_i = \ln(S_i) - \ln(S_{i-1})$. Para el caso del modelo de Merton, condicionando a $N_i = k \geq 0$, se tiene que (Rémillard, 2013)

$$R_i \sim \mathcal{N}(a + k\gamma, \sigma^2 h + k\delta^2)$$

Así, la densidad de R_i, está dada por:

$$f_{R_i}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\lambda h} \frac{(\lambda h)^k}{k!} \frac{e^{\frac{1}{2}\frac{(r-a-k\gamma)^2}{\sigma^2 h + k\delta^2}}}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 h + k\delta^2)}}$$

Donde μ y σ son la media y la varianza de difusión, respectivamente, λ son los saltos, γ y δ son la media y la varianza de difusión con saltos, respectivamente. Para el cálculo de los parámetros para BBVA, GFBanorte y Santander se utilizan datos de 3 años (2016-2018) y un código elaborado en MATLAB y se obtienen los siguientes resultados (todos los códigos MATLAB de la presente investigación están disponibles bajo su solicitud):

Cuadro 1. Estimación de parámetros a partir de los datos de 3 años (2016-2018) para difusión con saltos de los grupos financieros: BBVA, GFBanorte y Santander

Parámetros	BBVA	Banorte	Santander
μ	-0.017281201	0.058056404	-0.02737456
σ	0.273042574	0.222518987	0.225330667
λ	3.079682552	16.46840146	26.95829627
γ	0.025037245	-0.010658075	-0.002469119
0.047157827	0.066466624		0.02757398

Fuente: Elaboración propia a través del método de máxima verosimilitud mediante el sistema de cómputo numérico MATLAB.

Posteriormente se procede a programar en el sistema de cómputo numérico MATLAB la expansión en series que propuso Merton para aproximar el precio de una opción de compra, que como se ha expuesto, es una ponderación del precio de una opción europea tomando en cuenta el comportamiento del activo con discontinuidades (los saltos).

6.2 Discusión de los resultados empíricos

La estimación de la prima de riesgo también utiliza datos del período del 01/01/2016 al 31/12/2018, se consideran los valores de los: activos (Activosemp), pasivos (Pasivoemp), tasa libre de riesgo (TILR), tiempo (Tiempo), volatilidad sin saltos (Vol), lambda (lambda), la media para saltos (medSaltos), la volatilidad para saltos (volSaltos) y las iteraciones máximas (MaxIter) para cada empresa. Se tienen los siguientes valores para la función Merton de las empresas: BBVA[4], Banorte[5] y Santander[6]:

Cuadro 2. Valores para las variables utilizadas en la función Merton para BBVA, Banorte y Santander

Variables	BBVA	Banorte	Santander
Activosemp	226746700000	1620470000000	1381570000000
Pasivosemp	2050572000000	1446006000000	1255877000000
TILR	0.07618461538	0.07618461538	0.07618461538
Tiempo	1	1	1
Vol	0.273042574	0.222518987	0.225330667
lambda	0.00000122	4.456608419	18.48384671
medSaltos	-0.025037245	-0.010658075	-0.002469119
volSaltos	0.066468691	0.047157788	0.027574219
MaxIter	200	200	200

Fuente: Elaboración propia con datos de los estados financieros de cada empresa y los parámetros calculados a través del sistema de cómputo numérico MATLAB.

Para poder realizar la aplicación, el objetivo se reduce a un solo cálculo, el cuál brindará una prima de riesgo que se debe sumar a la tasa de interés libre de riesgo para comercializar el bono. Cuanto mayor sea esta prima de riesgo, mayor es el riesgo de incumplimiento por parte del corporativo. Se obtuvieron los siguientes resultados para cada empresa:

Cuadro 3. Resultados obtenidos para las empresas: BBVA, GFBanorte y Santander

Resultados	BBVA	Banorte	Santander
Opción Call Black-Scholes	32.76742996	25.67183472	7.397444216
Opción Call Merton con Saltos	22.81465115	24.22853226	6.403448315
Prima de Riesgo	0.123606861	0.184054786	0.335213631

Fuente: Elaboración propia resultados obtenidos mediante el sistema de cómputo numérico MATLAB.

El valor de la prima de riesgo $R(\tau)$ nos dirá el valor al cual es necesario comercializar los bonos de las empresas, siendo para BBVA una prima de riesgo de 12.3606861% sobre la tasa de interés libre de riesgo, que en el período de análisis fue de 7.61846154%. En el caso de Banorte se obtuvo que es 18.4054786% sobre la tasa de interés libre de riesgo. Por último, para Santander es de 33.5213631% sobre la tasa de interés libre de riesgo.

7. Conclusiones

[4] El estado financiero del 2018 fue consultado en https://investors.bancomer.com/wp-content/uploads/2019/03/2018-BBVA-BancomerS.-A.ef18.pdf.
[5] Consultado en https://investors.banorte.com/ /media/Files/B/Banorte-IR/financial-information/annual-reports/es/2018/EF % 20Banorte % 2018 % 20Final.pdf.
[6] Consultado en https://www.santander.com.mx/ir/pdf/09_info_financiera_edos_financieros_consolidados/2018/04_cuarto trim/Estados Financieros Consolidados 4T18.pdf.

En esta investigación se obtuvo el rendimiento de un bono con riesgo y a partir de éste se pudo calcular el riesgo de bonos de instituciones de banca múltiple. Para cada banco estudiado se obtuvo la prima de riesgo. Es relevante destacar que cuanto mayor fuera esta prima, mayor era el riesgo de incumplimiento por parte del corporativo.

Para lograr dicho objetivo se calcularon los parámetros del modelo de difusión con saltos para BBVA, GFBanorte y Santander y se estimó la prima de riesgo en el horizonte temporal comprendido entre 01/01/2016 y 31/12/2018 para los grupos financieros BBVA, GFBanorte y Santander. Para ello, se consultaron los activos y pasivos para cada grupo financiero, además se identificaron los saltos de los activos en ese periodo. Se calcularon también los parámetros requeridos en el modelo de Merton, μ, σ, γ y δ, siendo éstos la media y la varianza para la difusión sin saltos del valor de capitalización y la media y varianza para la difusión con saltos de los activos, respectivamente.

A partir de los datos recogidos para los 3 corporativos que han formado parte de la muestra se han aplicado varios programas desarrollados en MATLAB, resultando que la prima de riesgo es más alta fue para el grupo Santander y la más baja para BBVA. Es importante resaltar que estos grupos financieros dominan el mercado en México, por lo que una empresa con una mejor posición y calificación tendrá como resultado una prima más baja, pues está prima de riesgo la otorga el mercado.

Con los resultados obtenidos, se puede examinar el caso extremo en que uno o varios bancos llegaran a quebrar y lo que pasaría con la economía mexicana. La literatura sugiere que ante tal escenario, los agentes retirarían su dinero de los bancos, creando una crisis financiera sistémica en el país. Si todos los clientes acudieran a sacar su dinero del banco a la vez, se podría generar un desastre como el que ocurrió en Argentina en 2001. El sistema bancario colapsaría y no se podría devolver el todo dinero a ningún particular ya que el Instituto para la Protección al Ahorro Bancario (IPAB) se encarga de regresar una parte el dinero depositado en cualquiera de los bancos que operan en México. Esto es posible gracias a la cobertura que de forma gratuita y automática se obtiene al abrir cualquier tipo de cuenta de ahorro. El Seguro de Depósito cubre alrededor del 99% de todas las cuentas de ahorro en la banca mexicana. Esto es, a todos los ahorradores que tengan una cuenta en el sistema bancario mexicano quedarán cubiertos hasta por una cantidad de hasta 400 mil UDIs.

En México, de acuerdo a información de la CNBV, la estabilidad del sistema financiero hace poco probable que se presente una crisis, esto se debe a que ninguna institución bancaria atraviesa por problemas de solvencia o liquidez, y por el contrario todas cuentan con índices de capitalización superior a 10%, nivel superior al de las recomendaciones de entidades reguladoras nacionales e internacionales. No obstante, la autoridad financiera debería reforzar las medidas de supervisión a los bancos a través de reportes periódicos más frecuentes y más detallados. No obstante, es importante saber que en el remoto caso de que un banco enfrentara problemas de solvencia, el IPAB con base en las mejores prácticas internacionales, ofrece certidumbre a los usuarios de la banca de que su dinero está seguro y que lo recibirán en el menor tiempo posible hasta por una cantidad de hasta 400 mil UDIs.

8. Referencias

Avellaneada, M., and Zhu, J. (2001). Distancia al incumplimiento. RISK.NET, *NYU Courant Mathematics*. Obtenido de : https://www.math.nyu.edu/faculty/avellane/AVELLANE.pdf

Black, F., and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81 (3), 637-654.

Geske, R. (1977). Valuation of Corporate Liabilities as compound options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, November, 12 (4), 541-552.

Gómez, N. E. (2007). Determinantes de la probabilidad de incumplimiento de las empresas colombiana. *Banco de la República Colombia.* Obtenido de: http://www.banrep.gov.co/docum/ftp/borra466.pdf

Hernández, A. (2017). *El Universal online*. Define la CNBV a los 7 grupos financieros más importantes en México. Obtenido de: https://www.eluniversal.com.mx/articulo/cartera/finanzas/2017/04/10/define-la-cnbv-los-7-grupos-financieros-mas-importantes-en

Hull, J. C. (2014). *Options, futures and other derivatives.* USA, Pearson.

Itô, K. (1951). On stochastic differential equations. *On stochastic differential equations*. American Mathematical Society, Disponible en https://archive.org/details/onstochasticdiff029540mbp

Merton, R. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (1), 141-183.

Merton, R. (1974). On the pricing of the corporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29 (2), 449-470.

Pérez-Abreu, V. M., y Reynoso-Valle, D. (2010). *Departamento de Probabilidad y Estadística, CIMAT.* Introducción a los procesos de Poisson. Obtenido de: http://www.cimat.mx/Eventos/vpec10/img/NotasParte1.pdf

Rémillard, B. (2013). *Statistical Methods for Financial Engineering.* USA: CRC Press Taylor Francis Group.

Saunders, A., y Allen, L. (2002). *Credit risk measurement.* USA: John Wiley y Sons Inc.

Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económico: Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre.* México: Cengage.

Venegas-Martínez, F. Agudelo-Torres, G. A., Franco-Arbeláez, L. C, y Franco-Ceballos, L. E. (2016). Precio del dólar estadounidense en el mundo. Procesos de Itô económicamente ponderados en un análisis espacial. *Economía y Sociedad*, 20 (34), 83-105.

Venegas-Martínez, F. y Fundia-Aizenstat A. (2016). Opciones reales, valuación financiera de proyectos y estrategias de negocios. Aplicaciones al caso mexicano. *El Trimestre Económico*, 73 (290), 363-405.